

UFF - Universidade Federal Fluminense

Pólo Universitário de Volta Redonda

Física Experimental

Construção de gráficos e método dos mínimos quadrados

(Revisto em maio de 2008)

1 Construção de gráficos

Um gráfico apresenta um conjunto, ou mais, de dados experimentais numa figura. O gráfico objetiva mostrar visualmente a dependência entre uma grandeza e um parâmetro medidos simultaneamente. Para isto o gráfico deve ter os elementos essenciais abaixo.

Título do gráfico

Informa quais dados e que dependência está sendo representada. Por exemplo, se quer-se estudar a dependência da velocidade com o tempo o título pode ser de ser de uma das formas abaixo.

- Gráfico: velocidade (v) em função do tempo (t)
- Gráfico: v versus t
- Gráfico: $v(t)$

Títulos dos eixos

Especifica qual grandeza física o eixo representa e que unidade é utilizada na escala do eixo. O eixo vertical, das ordenadas, corresponde à grandeza que é especificada primeiro na título do gráfico, antes do “versus”, enquanto que o que vem depois é representado no eixo horizontal, das abcissas. Assim, por exemplo, quando se construir o gráfico de “ v versus t ”, as velocidades devem ser lidas nas escala do eixo vertical e os tempos no eixo horizontal. No título do eixo deve-se utilizar um símbolo adequado para a grandeza enquanto que

a unidade é informada em parêntesis ou com um separador “/” conforme os exemplos:

- $v (cm/s)$ ou $v (cm s^{-1})$ ou $v / cm s^{-1}$
- $t (s)$ ou t / s

Escala dos eixos

Fornece a escala em que a grandeza é representada no eixo graduado. O eixo possui uma graduação principal, podendo também possuir uma graduação secundária, sendo que apenas para a principal é colocado o texto de legenda da escala. As legendas da escala devem ser números redondos, preferencialmente, múltiplos de 2 ou 5.

- Atenção: É errado colocar os valores dos pontos experimentais como legendas nos eixos.

Legenda do gráfico

Quando mais de um conjunto de pontos é representado num único gráfico, é necessário diferenciar os conjuntos de dados usando símbolos diferentes. A legenda é um quadro inserido no gráfico onde se coloca o símbolo ao lado de um texto curto que especifica qual conjunto de dados aquele símbolo representa.

Estética

Um gráfico é uma figura, portanto, deve ser bem proporcionado e esteticamente agradável para facilitar sua observação e análise. Por exemplo, um gráfico achatado, assim como uma escala inadequada, dificulta a análise das dependências matemáticas.

Exemplos de gráficos

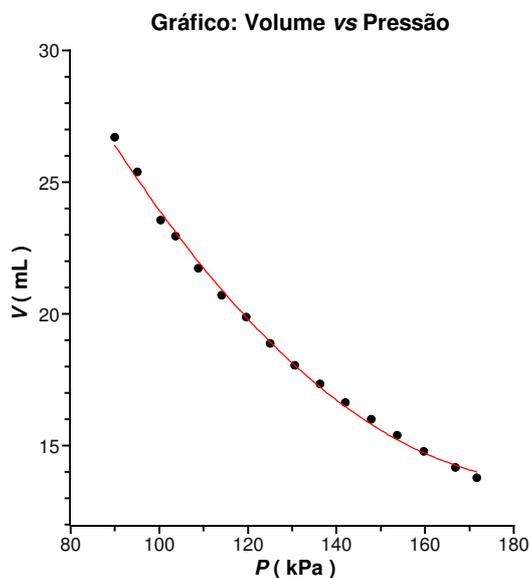


Figura 1

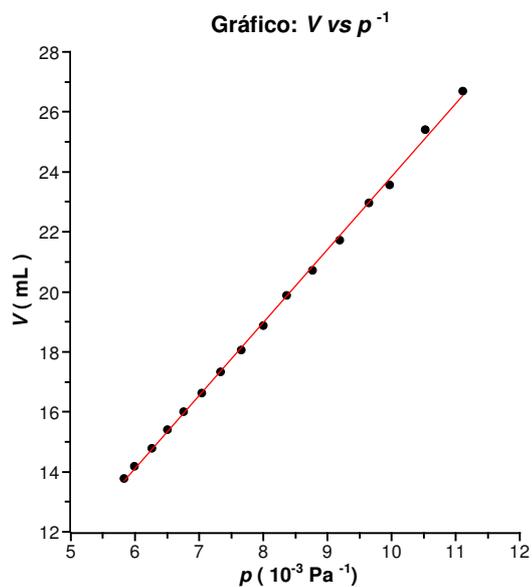


Figura 2

2 Análise de gráficos: ajuste linear

Seja um experimento que fornece como resultado um conjunto de N pares de medidas (X_i, Y_i) que graficamente representados geram uma reta. O ajuste linear é a análise matemática de dados que apresentam uma dependencia linear

$$Y = a + bX,$$

para a obtenção do coeficientes linear a e do coeficiente angular b . Apresentaremos abaixo um exemplo que analisaremos primeiro pelo método da triangulação e depois pelo método dos mínimos quadrados.

Método da triangulação

O método da triangulação consiste em traçar um triângulo retângulo com a hipotenusa apoiada sobre a melhor reta que passa pelos pontos experimentais.

Esta melhor reta é escolhida “a olho” de modo que os pontos se distribuam de forma igual acima e abaixo da reta.

O *coeficiente angular* b é determinado pela razão

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_{final} - Y_{inicial}}{X_{final} - X_{inicial}}.$$

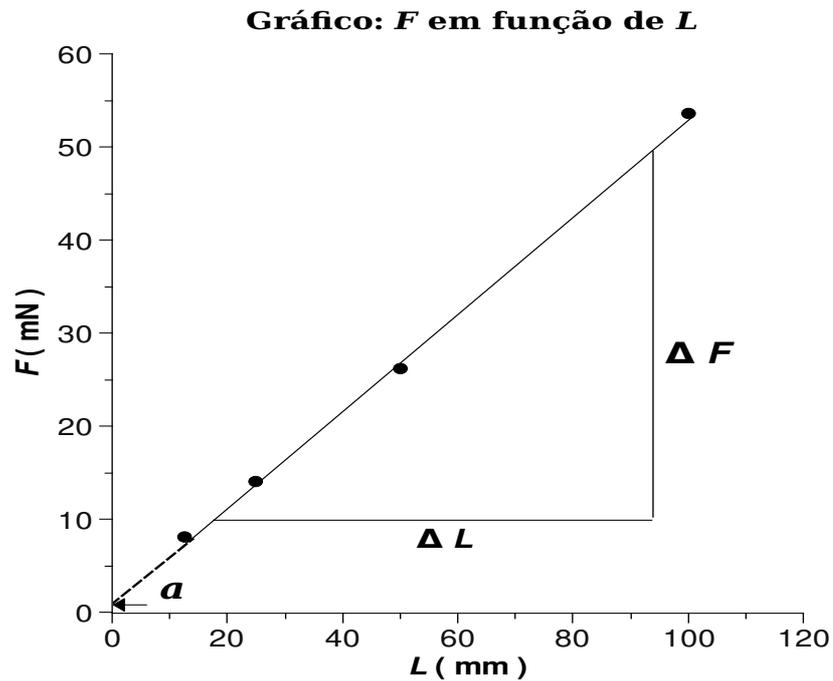


Figura 2

A figura 2 ilustra um exemplo de aplicação do método. Note que triângulo retângulo escolhido deve ser relativamente grande para diminuir a incerteza em ΔF e ΔL . O coeficiente linear $a = 1$ mN foi encontrado extrapolando a reta até $L = 0$. Já o coeficiente angular foi calculado como

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(50-20)mN}{94-18mm} = 0,53Nm^{-1}.$$

Chamamos a atenção para o fato de que tanto a como b podem ser positivos ou negativos e ambos possuem unidades. Também é importante notar que o coeficiente angular não é uma tangente pois possui unidade.

Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados resulta da minimização do quadrado da distância entre os valores experimentais de Y e os valores calculados como $Y' = a + bX$.

O coeficiente linear a e o coeficiente angular b são fornecidos pelas equações

$$a = \frac{\sum Y \sum X^2 - \sum X \sum XY}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

As incertezas de a e b são, respectivamente,

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum X^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}} \quad \text{e} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{N \sigma^2}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}},$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta Y)^2}{N-2},$$

e ΔY é a diferença entre os valores experimental e teórico

$$\Delta Y = Y - (a + bX).$$

Na Tabela 1 o método dos mínimos quadrados (MMQ) é aplicado aos dados do exemplo da Figura 3. A aplicação das fórmulas acima leva aos valores dos coeficientes da reta e suas incertezas mostrados na Tabela 2. A Tabela 2 mostra também os resultados obtidos com o método da triangulação e notamos que ambos os métodos concordam dentro da incerteza calculada.

Tabela 1: Cálculo do método dos mínimos quadrados para dados do comprimento e da força magnética sobre um fio com $I = 5$ A.

	X	Y	X^2	XY	$(a + bX)$	ΔY^2
n	$L(\text{mm})$	F (mN)				
1	12,5	8,0	156	100	7,5	0,29
2	25,0	14,0	625	351	14	0,00
3	50,0	26,2	2500	1309	27	0,66
4	100	53,6	10000	5356	53	0,31
Σ	187,5	101,8	13281	7116		1,26

Tabela 2: Resultado dos ajustes lineares pelos métodos da triangulação e dos mínimos quadrados.

	MMQ	Triangulação
a (mN)	$1,0 \pm 0,7$	1
b (Nm ⁻¹)	$0,52 \pm 0,01$	0,53